DUAL PADA MATROID

Alvinaria [1], Budi Rahadjeng, S.Si, M.Si. [2],
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60321
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60321
email : **Alvinaria@rocketmail.com** [1], **rahajeng13@yahoo.com** [2]

ABSTRAK

Misal S himpunan berhingga dan $\tilde{I}$ koleksi himpunan bagian dari S yang memenuhi 3 syarat. Pasangan himpunan terurut S dan $\tilde{I}$ yang ditulis $M = (S, \tilde{I})$ disebut matroid. Himpunan bebas maksimal pada matroid M disebut basis. Himpunan tak bebas minimal pada matroid M disebut sirkit. Untuk $A \subseteq S$, rank dari A yang dinotasikan $\rho(A)$ adalah $\rho(A) =$ maksimum $\{|X|: X \subseteq A, X \in \tilde{I}\}$. Rank dari matroid M yang dinotasikan sebagai $\rho(M)$ adalah rank dari himpunan S. Dapat dibentuk dual matroid M^* dengan menggunakan $\mathfrak{B}(M)$ koleksi basis dari sebuah matroid M pada himpunan S. Basis dari M^* disebut kobasis dari M, sirkit dari M^* disebut kosirkit dari M, dan rank dari M^* disebut korank dari M. Untuk semua $A \subseteq S$ berlaku $\rho^*(A) = |A| + \rho(S - A) - \rho(M)$, jika $A \cap A^* = \emptyset$, maka ada sebuah basis B dengan $A \subseteq B$ dan $A^* \subseteq B^*$. Subset X dari S adalah basis dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M. Subset X dari S adalah sebuah sirkit dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M. Matroid M^* adalah dual pada matroid M, sedangkan matroid M adalah dual pada matroid M^*.

Kata kunci : matroid dan dual matroid, basis, sirkit, rank, kobasis, kosirkit, korank

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang Matematika yang sudah ada sejak tahun 1736 dan diperkenalkan oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler. Salah satu teori yang merupakan perkembangan dari teori graf adalah teori matroid. Matroid telah diperkenalkan oleh Whitney [1935] untuk mempelajari aspek *planarity* dan aspek aljabar dalam graf, oleh MacLane [1936] untuk mempelajari *k geometric lattices*, dan oleh van der Waerdon [1937] untuk mempelajari kebebasan pada ruang vektor. Beberapa teori tentang matroid telah dibahas pada beberapa skripsi yaitu oleh Maria Isdiyana [2005] dengan judul Pengantar Matroid yang membahas mengenai konsep-konsep dasar matroid beserta karakterisasi matroid dengan mengenalkan sistem-sistem aksioma berbeda dan membuktikan kesetaraannya, oleh Rina Miftahul Jannah [2005] dengan judul Beberapa Sifat Matroid yang membahas beberapa sifat penting dari matroid dan oleh Heni Agustina [2007] dengan judul Representasi Geometris Matroid yang membahas mengenai representasi geometris pada matroid. Selanjutnya, dengan adanya beberapa skripsi tersebut penulis ingin mengetahui lebih dalam mengenai teori matroid dan penulis memilih salah satu teori pada matroid yaitu dual pada matroid.

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengkaji tentang teori matroid khususnya membahas mengenai basis, sirkit dan rank serta mengkaji tentang dual matroid khususnya membahas mengenai kobasis, kosirkit dan korank.

II. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan dijelaskan beberapa kajian teori yang digunakan untuk pembahasan pada bab selanjutnya.

2.1 Himpunan

Definisi

Himpunan adalah koleksi dari benda atau obyek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek pada himpunan disebut elemen atau anggota dari himpunan. Himpunan A adalah subset dari himpunan B ditulis $A \subseteq B$ jika dan hanya jika semua elemen dari himpunan A adalah elemen dari himpunan B. Himpunan A adalah subset sejati dari himpunan B ditulis $A \subset B$ jika dan hanya jika A subset dari B tetapi $A \neq B$. Irisan dua himpunan A dan B ditulis $A \cap B$ adalah $A \cap B = \{x | x \in A$ dan $x \in B\}$. Gabungan dua himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah $A \cup B = \{x | x \in A$ atau $x \in B\}$. Pengurangan dua himpunan A dan B ditulis $A - B$ adalah $A - B = \{x | x \in A$ dan $x \notin B\}$. Himpunan A dan himpunan B adalah himpunan saling lepas jika $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 2.1.1
Jika X dan Y adalah himpunan berhingga, maka $X \cup Y$ adalah berhingga. Selanjutnya $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$, dan jika X dan Y adalah himpunan saling lepas, maka $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. [4]

2.2 Matroid
Definisi 2.2.1
Misal S adalah himpunan berhingga dan $\tilde{\mathrm{I}}$ adalah koleksi himpunan bagian dari S yang memenuhi :
(i) $\emptyset \in \tilde{\mathrm{I}}$
(ii) Jika $X \in \tilde{\mathrm{I}}$ dan $Y \subseteq X$, maka $Y \in \tilde{\mathrm{I}}$
(iii) Jika X dan Y adalah anggota dari $\tilde{\mathrm{I}}$ dengan $|X| = |Y| + 1$, maka ada $x \in X - Y$ sehingga $Y \cup \{x\} \in \tilde{\mathrm{I}}$
maka pasangan himpunan terurut S dan $\tilde{\mathrm{I}}$ ditulis $M = (S, \tilde{\mathrm{I}})$ disebut sebagai matroid. [10]

Contoh 2.2.1 :
1. Misal $S = \{a, b, c\}$ dan $\tilde{\mathrm{I}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, S dan $\tilde{\mathrm{I}}$ membentuk sebuah matroid.

Definisi 2.2.2

Elemen-elemen dari S disebut elemen dari matroid M. Anggota-anggota $\tilde{\mathrm{I}}$ disebut himpunan bebas dari M. Subset-subset dari S yang bukan anggota $\tilde{\mathrm{I}}$ disebut himpunan tak bebas dari M. Koleksi himpunan tak bebas dilambangkan dengan Ɗ. Himpunan bebas yang maksimal adalah himpunan bebas yang tidak termuat dalam himpunan bebas lainnya. Basis dari matroid M adalah sebuah himpunan bebas yang maksimal dari M. Koleksi basis dari M dinotasikan sebagai $\mathfrak{B}(M)$. Sirkit dari matroid M adalah himpunan tak bebas yang minimal dari M. Koleksi sirkit dari M dilambangkan dengan $\acute{C}(M)$. Misal A adalah himpunan bagian dari S, rank dari A yang dinotasikan $\rho(A)$ adalah $\rho(A) =$ maksimum $\{|X| : X \subseteq A, X \in \tilde{\mathrm{I}}\}$. Rank dari matroid M yang dinotasikan sebagai $\rho(M)$ adalah rank dari himpunan S. [10

Aksioma 2.2.1
Misal $\mathfrak{B}(M)$ adalah koleksi basis dari matroid M maka :

i). $\mathfrak{B}(M) \neq \emptyset$ dan tidak ada himpunan di $\mathfrak{B}(M)$ yang memuat anggota lainnya di $\mathfrak{B}(M)$.

ii). Jika $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathfrak{B}(M)$ dan $x \in \mathrm{B}_1$, maka ada $y \in \mathrm{B}_2$ sedemikian sehingga $(\mathrm{B}_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathfrak{B}(M)$. [10]

Lemma 2.2.1
Misalkan M adalah matroid pada himpunan S dan $\mathfrak{B}(M)$ adalah koleksi basis dari M. Jika $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathfrak{B}(M)$, maka untuk setiap $e \in \mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2$ terdapat $f \in \mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1$ sedemikian sehingga $\mathrm{B}_1 - \{e\} \cup \{f\} \in \mathfrak{B}(M)$. [6]

Akibat 2.2.1
Misal M adalah matroid pada himpunan S dan $A \subseteq S$. Maka semua himpunan bebas maksimal dari A mempunyai kardinalitas yang sama. [10]

Teorema 2.2.1
Jika A adalah himpunan bebas dari matroid M pada himpunan S, maka untuk setiap $x \in S$, $A \cup \{x\}$ memuat paling banyak satu sirkit. [10]

Definisi 2.2.6
Beberapa sifat dari sirkit yang langsung mengikuti dari definisi sirkit antara lain :
(i) Setiap subset sejati dari sirkit adalah himpunan bebas. Jadi, jika C_1 dan C_2 adalah sirkit yang berbeda, maka $C_1 \nsubseteq C_2$.
(ii) Jika C adalah sirkit, maka $\rho(C) = |C| - 1$.
(iii) Sebuah matroid M pada himpunan S tidak mempunyai sirkit jika dan hanya jika semua subset dari S adalah himpunan bebas. Maka S adalah basis dari matroid S. [10]

Akibat 2.2.2
Semua basis dari matroid M pada himpunan S mempunyai kardinalitas yang sama dengan rank dari M. [10]

III. PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang dual matroid dan beberapa teorema yang berhubungan dengan matroid dan dual matroid khususnya mengenai hubungan basis, sirkit, rank, kobasis, kosirkit dan korank.

Teorema 3.1

Misal $S \neq \emptyset, M = (S, \tilde{\mathrm{I}})$ adalah matroid dengan $\mathfrak{B}(M)$ koleksi basis pada M.

Jika $\mathfrak{B}^*(M) = \{S - B | B \in \mathfrak{B}(M)\}$ dan $\tilde{\mathrm{I}}^* = \{I | I \subseteq B^*, B^* \in \mathfrak{B}^*(M)\}$, maka $M^* = (S, \tilde{\mathrm{I}}^*)$ adalah matroid dengan koleksi basisnya $\mathfrak{B}^*(M)$.

Bukti :

Karena $\tilde{I} \neq \emptyset$, maka $\mathfrak{B}(M) \neq \emptyset$ sehingga $\mathfrak{B}^*(M) \neq \emptyset$.

(i) $\emptyset \subseteq B^*$ dengan $B^* \in \mathfrak{B}^*(M)$ sehingga $\emptyset \in \tilde{I}^*$.

(ii) Misalkan $I_1 \in \tilde{I}^*$ maka $I_1 \subseteq B^*$ untuk suatu $B^* \in \mathfrak{B}^*(M)$.

Jika $I_2 \subseteq I_1$ maka $I_2 \subseteq B^*$ sehingga $I_2 \in \tilde{I}^*$.

(iii) Misalkan I_1 dan I_2 adalah anggota $\tilde{I}^*$, dengan $|I_1| = |I_2| + 1$.

Akan dibuktikan : $\exists x \in I_1 - I_2 \ni I_2 \cup \{x\} \in \tilde{I}^*$.

Kasus 1 : Jika I_2 bukan merupakan himpunan maksimal di $\tilde{I}^*$. Berdasarkan definisi $\tilde{I}^*$, karena I_2 bukan himpunan maksimal maka $\exists x \in S \ni I_2 \cup \{x\} \in \tilde{I}^*$.

Kasus 2 : Jika I_2 merupakan himpunan maksimal di $\tilde{I}^*$.Karena I_2 himpunan maksimal di $\tilde{I}^*$, maka $I_2 \in \mathfrak{B}^*(M)$ sehingga $I_2 = S - B$, untuk suatu $B \in \mathfrak{B}^*(M)$. Berdasarkan definisi matroid, $\exists x \in S \ni I_2 \cup \{x\} \in \tilde{I}$. $I_2 \cup \{x\} \in \mathfrak{B}^*(M)$ sehingga $I_2 \cup \{x\} \in \tilde{I}^*$.

Jadi terbukti bahwa $(S, \tilde{I}^*)$ adalah matroid.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathfrak{B}^*(M)$ adalah basis untuk $M^* = (S, \tilde{I}^*)$. Untuk membuktikan $\mathfrak{B}^*(M)$ adalah basis untuk $M^* = (S, \tilde{I}^*)$, akan dibuktikan bahwa :

(i) Setiap $B^* \in \mathfrak{B}^*(M)$, maka $B^* \in \tilde{I}^*$

(ii) Setiap subset sejati dari elemen $\mathfrak{B}^*(M)$ bukan merupakan anggota $\mathfrak{B}^*(M)$

langkah-langkah pembuktiannya, dijabarkan pada langkah di bawah ini.

(i) Berdasarkan definisi $\tilde{I}^*$, maka $\forall B^* \in \mathfrak{B}^*(M)$ maka $B^* \subseteq B^*$ sehingga $B^* \in \tilde{I}^*$.

(ii) Misalkan $B^* \in \mathfrak{B}^*(M)$ dan $A \subset B^*$ (A subset sejati B^*).

Karena $A \subset B^*$, berdasarkan definisi $\mathfrak{B}^*(M)$ maka

$A \subset S - B$, untuk suatu $B \in \mathfrak{B}(M)$ dengan B adalah elemen maksimal di $\tilde{I}$. Sehingga $A \notin \mathfrak{B}^*(M)$.

Jadi terbukti $\mathfrak{B}^*(M)$ merupakan koleksi basis dari matroid $M^* = (S, \tilde{I}^*)$.

Definisi 3.1
Misal M adalah matroid pada himpunan S dan $\mathfrak{B}(M)$ adalah koleksi basis dari matroid M. Misal $\mathfrak{B}^*(M) = \{S - B | B \in \mathfrak{B}(M)\}$ adalah koleksi dari komplemen koleksi basis matroid M. Matroid pada himpunan S dengan $\mathfrak{B}^*(M)$ adalah koleksi basisnya disebut dual pada matroid M dan dinotasikan M^*.

Selanjutnya

(i) $S - (S - B) = B$ maka $(B^*)^* = B$

(ii) $\forall X \subset B$ maka $X \in \tilde{I}$. Jadi $(\tilde{I}^*)^* = \tilde{I}$. Jadi $(M^*)^* = M$.

Contoh 3.1 :
Diberikan suatu matroid $M = (S, \tilde{I})$ dengan $S = \{a, b, c\}$ dan $\tilde{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Matroid tersebut memiliki koleksi basis $\mathfrak{B}(M) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Dengan koleksi basis tersebut dapat dibuat basis $\mathfrak{B}^*(M)$ dengan $\mathfrak{B}^*(M) = \{S - B | B \in \mathfrak{B}(M)\}$ sehingga $\mathfrak{B}^*(M) = \{\{c\}, \{b\}, \{a\}\}$. Dari basis $\mathfrak{B}^*(M)$ tersebut dapat dibuat $\tilde{I}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Misal $M^* = (S, \tilde{I}^*)$ adalah matroid. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $M^* = (S, \tilde{I}^*)$ dengan $S = \{a, b, c\}$ dan $\tilde{I}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ adalah sebuah matroid.

Definisi 3.2
Basis dari M^* disebut kobasis dari M. Sirkit dari M^* disebut kosirkit dari M. Rank dari M^* disebut korank dari M dan dinotasikan $\rho^*(M)$.

Teorema 3.2 :
Misalkan M dan M^* adalah dual matroid pada sebuah himpunan S.
Untuk semua $A \subseteq S$ berlaku

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(S - A) - \rho(M)$$

Bukti :
Misalkan $A \subseteq S$ dan B^* adalah sebuah basis dari M^* sedemikian sehingga $|B^* \cap A|$ adalah maksimum. B adalah sebuah basis dari M dengan $|B \cap (S - A)|$ adalah maksimum.

$(B^* \cap A) \subset A$ dan $(B^* \cap A) \subset B^*$. Karena $(B^* \cap A) \subset B^*$ atau $(B^* \cap A)$ subset dari himpunan bebas maksimal pada matroid M^*, maka $(B^* \cap A)$ merupakan himpunan bebas pada matroid M^* atau $(B^* \cap A) \in \tilde{I}^*$, dimana $\tilde{I}^*$ adalah himpunan bebas pada matroid M^*.

Dari definisi fungsi rank $\rho^*(A) =$ maks $\{|X|: X \subset A, X \in \tilde{I}^*\}$ dan dari diketahui bahwa $|B^* \cap A|$ adalah maksimum dengan $(B^* \cap A) \subset A, (B^* \cap A) \in \tilde{I}^*$ maka

$\rho^*(A) = |B^* \cap A|$ …..(1)

$(B \cap (S - A)) \subset (S - A)$ dan $(B \cap (S - A)) \subset B$. Karena $(B \cap (S - A)) \subset B$ atau $B \cap (S - A)$ subset dari himpunan bebas maksimal pada matroid M, maka $B \cap (S - A)$ merupakan himpunan bebas pada matroid M atau $(B \cap (S - A)) \in \tilde{I}$.

Dari definisi fungsi rank $\rho(S - A) =$ maks $\{|X|: X \subset (S - A), X \in \tilde{I}\}$ dan dari diketahui bahwa $|B \cap (S - A)|$ adalah maksimum dengan $(B \cap (S - A)) \subset (S - A), (B \cap (S - A)) \in \tilde{I}$ maka

$\rho(S - A) = |B \cap (S - A)|$ …..(2)

Perhatikan bahwa

$B^* \cap A = A \cap B^*$ (komutatif irisan)
$= \{x | x \in A \text{ dan } x \in B^*\}$
$= \{x | x \in A \text{ dan } x \in S - B\}$
$= A - B$
$= (A - B) \cup (A - A)$
$= A - (B \cap A)$ (sifat pengurangan $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$ …(3)

$B \cap (S - A) = \{x | x \in B \text{ dan } x \in (S - A)\}$
$= B - A$
$= (B - A) \cup (B - B)$
$= B - (A \cap B)$
(sifat pengurangan $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$) …(4)

Dari (3) diperoleh

$|B^* \cap A| = |A - (B \cap A)|$
$= |A| - |B \cap A|$ …..(5)

Untuk membuktikan $|A - (B \cap A)| = |A| - |B \cap A|$, dibagi menjadi 2 kasus :

a) $(B \cap A) = \emptyset$
b) $(B \cap A) \neq \emptyset$

- Untuk kasus $(B \cap A) = \emptyset$,

Karena $A - (B \cap A)$ saling lepas dengan $(B \cap A)$ sehingga $|A - (B \cap A)|$ dapat ditambahkan dengan $|(B \cap A)|$ diperoleh

$|A - (B \cap A)| + |B \cap A| = |(A - \emptyset)| + |\emptyset| = |A|$

Maka

$|A - (B \cap A)| + |B \cap A| = |A|$
$|A - (B \cap A)| = |A| - |B \cap A|$

- Untuk kasus $(B \cap A) \neq \emptyset$,

karena $A - (B \cap A)$ saling lepas dengan $(B \cap A)$ sehingga $|A - (B \cap A)|$ dapat ditambahkan dengan $|(B \cap A)|$ diperoleh

$|A - (B \cap A)| + |B \cap A|$
$= |(A - (B \cap A)) \cup ((B \cap A))|$ (Teorema 2.1.8)
$= |(A \cap (B \cap A)^*) \cup ((B \cap A)))|$ (definisi $A - B$

$= |(A \cap (B^* \cup A^*)) \cup ((B \cap A))|$ (De Morgan)

$= |(A \cap (A^* \cup B^*)) \cup ((B \cap A))|$ (komutatif gabungan)

$= |((A \cap A^*) \cup (A \cap B^*)) \cup ((B \cap A))|$ (dari sifat distributive

$= |(\emptyset \cup (A \cap B^*)) \cup ((B \cap A))|$
$= |(A \cap B^*) \cup (B \cap A)|$
$= |(A \cap B^*) \cup (A \cap B)|$ (komutatif irisan)
$= |A \cap (B^* \cup B)|$ (distributif)
$= |A \cap ((S - B) \cup B)|$
$= |A \cap S| = |A|$

Maka

$|A - (B \cap A)| + |B \cap A| = |A|$
$|A - (B \cap A)| = |A| - |B \cap A|$

Selanjutnya

dari (5) diperoleh

$|B^* \cap A| = |A - (B \cap A)| = |A| - |(B \cap A)|$ …(6)

dan

dari (4) diperoleh

$|B \cap (S - A)| = |B - (A \cap B)|$
$|B \cap (S - A)| = |B| - |(A \cap B)|$
$|B \cap (S - A)| = \rho(M) - |B \cap A|$ … Akibat 2.2.5.1
$|B \cap A| = \rho(M) - |B \cap (S - A)|$ ...(7)

Sehingga dari (1) dan (6) diperoleh

$\rho^*(A) = |B^* \cap A| = |A| - |B \cap A|$
$\rho^*(A) = |B^* \cap A| = |A| - (\rho(M) - |B \cap (S - A)|)$ dari (7)

$\rho^*(A) = |B^* \cap A| = |A| + |B \cap (S - A)| - \rho(M)$ $\rho^*(A) = |A| + \rho(S - A) - \rho(M)$ dari (2)

Lemma 3.1 :

Misal M adalah matroid pada sebuah himpunan S. Jika $A \subseteq S$ adalah himpunan bebas di M, maka $S - A$ memuat sebuah kobasis dari M. Demikian juga, jika $A^* \subseteq S$ adalah himpunan bebas di M^*, maka $S - A^*$ memuat sebuah basis dari M.

Bukti :

Jika $A \subseteq S$ adalah himpunan bebas di M maka ada sebuah basis B dari M dengan $A \subseteq B$ sehingga $S - A$ memuat kobasis B^* dari M.

Demikian juga, jika $A^* \subseteq S$ adalah himpunan bebas di M^* maka ada sebuah kobasis B^* dari M dengan $A^* \subseteq B^*$ sehingga $S - A^*$ memuat basis B dari M.

Teorema 3.3 :

Misal M adalah matroid pada himpunan S. Jika A dan A^* adalah subset-subset dari S dengan $A \cap A^* = \emptyset, A$ himpunan bebas di M dan A^* himpunan bebas di M^*, maka ada sebuah basis B dari M dengan $A \subseteq B$ dan $A^* \subseteq B^*$.

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.1 terlihat bahwa $S - A^*$ memuat sebuah basis dari M atau $B \subseteq (S - A^*)$. Karena A adalah himpunan bebas di M maka $A \subseteq B$. Sehingga ada sebuah basis B dari M dengan $A \subseteq B \subseteq S - A^*$. Untuk $B \subseteq S - A^*$ dapat dituliskan $S - B^* \subseteq S - A^*$. Jadi $A^* \subseteq B^*$.

Lemma 3.2 :

Misal M adalah matroid pada sebuah himpunan S. Kemudian setiap basis B dari M mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M. Demikian juga, setiap kobasis B^* dari M mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M.

Bukti :

Andaikan untuk setiap kosirkit C^* dari M, $C^* \cap B = \emptyset$. $C^* \cap B = \emptyset$ berarti $\forall x \in C^*, x \notin B$. Karena $B^* = S - B$ maka $\forall x \in C^*, x \in S - B$ atau $\forall x \in C^*, x \in B^*$. Karena $\forall x \in C^*, x \in B^*$ maka B^* memuat C^*. Hal tersebut kontradiksi dengan kebebasan B^* dari M. Seharusnya $C^* \cap B \neq \emptyset$.

Demikian juga andaikan untuk setiap sirkit C dari M, $C \cap B^* = \emptyset$. $C \cap B^* = \emptyset$ berarti $\forall x \in C, x \notin B^*$. Karena $B^* = S - B$ maka $\forall x \in C, x \in S - B^*$ atau $\forall x \in C, x \in B$. Karena $\forall x \in C, x \in B$ maka B memuat C. Hal tersebut kontradiksi dengan kebebasan B dari M. Seharusnya $C \cap B^* \neq \emptyset$.

Lemma 3.3

Jika B adalah basis dari matroid M pada himpunan S dan $x \in S - B$, maka ada dan tunggal sebuah sirkit $C = C(x, B)$ sedemikian sehingga $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$.

Demikian juga, jika B^* adalah kobasis dari matroid M pada himpunan S dan $x \in B$, maka ada dan tunggal sebuah kosirkit $C^* = C(x, B^*)$ sedemikian sehingga $x \in C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$.

Bukti :

B adalah basis dari matroid M pada himpunan S dan $x \in S - B$. Karena B adalah basis, berdasarkan definisi basis, maka B adalah himpunan bebas maksimal pada M. Karena B adalah himpunan bebas maksimal pada M dan $x \in S - B$ atau x bukan elemen B. Maka $B \cup \{x\}$ adalah himpunan tak bebas pada M.

Karena $B \cup \{x\}$ adalah himpunan tak bebas pada M, maka $B \cup \{x\}$ memuat sirkit C, dimana sirkit adalah himpunan tak bebas minimal pada M. Sehingga dapat dituliskan $C \subseteq B \cup \{x\}$. Berdasarkan Teorema 2.2.1, diperoleh sirkit C tersebut adalah tunggal. Pada langkah-langkah sebelumnya diperoleh $C \subseteq B \cup \{x\}$, $x \in S - B$. Sehingga untuk $C \subseteq B \cup \{x\}$ berlaku ketika $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$.

Demikian juga, B^* adalah kobasis dari matroid M pada himpunan S dan
$x \in B$. Karena B^* adalah kobasis, berdasarkan definisi kobasis, maka B^* adalah himpunan bebas maksimal pada M^*. Karena B^* adalah himpunan bebas maksimal pada M^* dan $x \in B$ atau x elemen B dan juga x bukan elemen B^*. Maka $B^* \cup \{x\}$ adalah himpunan tak bebas pada M^*. Karena $B^* \cup \{x\}$ adalah himpunan tak bebas pada M^*, maka $B^* \cup \{x\}$ memuat kosirkit C^*, dimana kosirkit adalah himpunan tak bebas minimal pada M^*. Sehingga dapat dituliskan $C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$. Berdasarkan Teorema 2.2.1, diperoleh kosirkit C^* tersebut adalah tunggal. Pada langkah-langkah sebelumnya diperoleh $C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$, $x \in B$. Sehingga untuk
$C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$ berlaku ketika $x \in C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$.

Lemma 3.4 :

Misal M adalah matroid. Untuk setiap himpunan bebas A dari M terdapat sebuah kosirkit mempunyai tepat satu elemen dari A. Selanjutnya, jika $|A| < \rho(M)$, kemudian ada sebuah kosirkit mempunyai irisan kosong dengan A.

Demikian juga, untuk setiap himpunan bebas A^* dari M^* ada sebuah sirkit mempunyai tepat satu elemen dari A^*. Selanjutnya, jika $|A^*| < \rho^*(M^*)$, kemudian ada sebuah sirkit mempunyai irisan kosong dengan A^*.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan bebas dari M, misal A. Karena A adalah himpunan bebas dari M, maka pasti ada B (basis) yang merupakan himpunan bebas maksimal dari M, sedemikian sehingga $A \subseteq B$. Karena terdapat B, maka dapat diperoleh B^* (kobasis) dari M dengan $B^* = S - B$. Ambil sebarang elemen dari B, misal elemen tersebut x. Berdasarkan Lemma 3.3, maka ada dan tunggal sebuah kosirkit $C^* = C^*(x, B^*)$ sedemikian sehingga $x \in C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$. Selanjutnya, jika dibentuk $C^* \cap A$ akan menghasilkan 3 kasus yaitu $C^* \cap A$ menghasilkan lebih dari satu elemen, $C^* \cap A = \{x\}$ atau $C^* \cap A$ menghasilkan satu elemen dan $C^* \cap A = \emptyset$.

Untuk kasus $C^* \cap A$ menghasilkan lebih dari satu elemen, dimisalkan ada dua elemen yaitu x dan y yang merupakan hasil irisan C^* dan A.

Karena
$C^* \cap A = \{x, y\}$, maka $x \in C^*, x \in A$ dan $y \in C^*, y \in A$.
$x \in A$ dan $y \in A$, karena $A \subseteq B$ maka $x \in B$ dan $y \in B$.

Berdasarkan Lemma 3.3, ada $B^*, x \in B$ maka ada dan tunggal C^* sedemikian sehingga $x \in C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$. Dan ada $B^*, y \in B$ maka ada dan tunggal C'^* sedemikian sehingga $y \in C'^* \subseteq B^* \cup \{y\}$. Sehingga x dan y seharusnya berada pada kosirkit yang berbeda atau $C^* \cap A \neq \{x, y\}$. Untuk kasus $C^* \cap A = \{x\}$, maka $x \in C^*, x \in A$. $x \in A$, karena $A \subseteq B$ maka $x \in B$. Berdasarkan lemma 3.3, ada $B^*, x \in B$ maka ada dan tunggal C^* sedemikian sehingga $x \in C^* \subseteq B^* \cup \{x\}$. Maka pernyataan benar untuk $C^* \cap A = \{x\}$ atau dapat dinyatakan bahwa terdapat sebuah kosirkit yang mempunyai tepat satu elemen dari A. Untuk kemungkinan $C^* \cap A = \emptyset$, tidak mungkin terjadi karena pada kasus $C^* \cap A = \{x\}$ terbukti benar. Jadi untuk setiap himpunan bebas A dari M terdapat sebuah kosirkit mempunyai tepat satu elemen dari A.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $|A| < \rho(M)$, ada kosirkit C^* dengan $C^* \cap A = \emptyset$. Andaikan $C^* \cap A \neq \emptyset$, maka $\exists x \in C^* \cap A$. Akibatnya $x \in C^*, x \in A$. Sedangkan diketahui

$$|A| < \rho(M) \quad \ldots(8)$$

berdasarkan Akibat 2.2.2 diketahui $\rho(M) = |B|$. Karena $\rho(M) = |B|$ maka persamaan (8) menjadi $|A| < |B|$. Karena A, B merupakan himpunan bebas pada M, maka A dan B memenuhi sifat ketiga dari matroid yaitu $\exists x \in B - A$, kontradiksi dengan $x \in A$, maka untuk kosirkit yang irisannya dengan A bukan himpunan kosong adalah salah. Seharusnya jika $|A| < \rho(M)$, ada sebuah kosirkit yang irisannya dengan A adalah himpunan kosong atau $C^* \cap A = \emptyset$.

Demikian juga, ambil sebarang himpunan bebas dari M, misal A^*. Karena A^* adalah himpunan bebas dari M^*, maka pasti ada B^* (kobasis) yang merupakan himpunan bebas maksimal dari M^*, sedemikian sehingga $A^* \subseteq B^*$. Karena terdapat B^*, maka dapat diperoleh B (basis) dari M dengan $B^* = S - B$. Ambil $x \in B^*$.

Berdasarkan Lemma 3.3, maka ada dan tunggal sebuah sirkit $C = C(x, B)$ sedemikian sehingga $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$. Selanjutnya, jika dibentuk $C \cap A^*$ akan menghasilkan 3 kasus yaitu $C \cap A^*$ menghasilkan lebih dari satu elemen, $C \cap A^* = \{x\}$ atau $C \cap A^*$ menghasilkan satu elemen dan $C \cap A^* = \emptyset$.

Untuk kasus $C \cap A^*$ menghasilkan lebih dari satu elemen, dimisalkan ada dua elemen yaitu x dan y yang merupakan hasil irisan C dan A^*.

Karena $C \cap A^* = \{x, y\}$, maka $x \in C, x \in A^*$ dan $y \in C, y \in A^*$.
$x \in A^*$ dan $y \in A^*$, karena $A^* \subseteq B^*$ maka $x \in B^*$ dan $y \in B^*$.

Berdasarkan Lemma 3.3, ada $B, x \in B^*$ maka ada dan tunggal C sedemikian sehingga $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$. Dan ada $B, y \in B^*$ maka ada dan tunggal C' sedemikian sehingga $y \in C' \subseteq B \cup \{y\}$. Sehingga x dan y seharusnya berada pada sirkit yang berbeda atau $C \cap A^* \neq \{x, y\}$. Untuk kasus $C \cap A^* = \{x\}$, maka $x \in C, x \in A^*$. $x \in A^*$, karena $A^* \subseteq B^*$ maka $x \in B^*$. Berdasarkan Lemma 3.3, ada $B, x \in B^*$ maka ada dan tunggal C sedemikian sehingga $x \in C \subseteq B \cup \{x\}$. Maka pernyataan benar untuk $C \cap A^* = \{x\}$ atau dapat dinyatakan bahwa terdapat sebuah sirkit yang mempunyai tepat satu elemen dari A^*. Untuk kemungkinan $C \cap A^* = \emptyset$, tidak mungkin terjadi karena pada kasus $C \cap A^* = \{x\}$ terbukti benar. Jadi untuk setiap himpunan bebas A^* dari M^* terdapat sebuah sirkit mempunyai tepat satu elemen dari A^*.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $|A^*| < \rho^*(M)$, ada sirkit C dengan $C \cap A^* = \emptyset$. Andaikan $C \cap A^* \neq \emptyset$, maka $\exists x \in C \cap A^*$. Akibatnya $x \in C, x \in A^*$. Sedangkan diketahui $|A^*| < \rho^*(M)$

$$\ldots(9)$$

Berdasarkan Akibat 2.2.2 diketahui $\rho^*(M) = |B^*|$. Karena $\rho^*(M) = |B^*|$ maka persamaan (9) menjadi $|A^*| < |B^*|$. Karena A^*, B^* merupakan himpunan bebas pada M^*, maka A^* dan B^* memenuhi sifat ketiga dari matroid yaitu $\exists x \in B^* - A^*$ kontradiksi dengan $x \in A^*$, maka untuk sirkit yang irisannya dengan A^* bukan himpunan kosong adalah salah. Seharusnya jika $|A^*| < \rho^*(M)$, ada sebuah sirkit yang irisannya dengan A^* adalah himpunan kosong atau $C \cap A^* = \emptyset$.

Teorema 3.4 :
Misal M adalah matroid pada himpunan S. Subset X dari S adalah basis dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M.

Demikian juga, subset X^* dari S adalah kobasis dari M jika dan hanya jika X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M.

Bukti :
($\Rightarrow$) Misal M adalah matroid pada himpunan S. Subset X dari S adalah basis (himpunan bebas maksimal) dari M. Berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh untuk himpunan bebas X dari M terdapat sebuah kosirkit yang mempunyai tepat satu elemen dari X atau dapat dituliskan $X \cap C^* = \{x\}$. Karena irisannya hanya menghasilkan satu elemen, X adalah subset minimal. Berdasarkan lemma 3.2 diperoleh $X \cap C^* \neq \emptyset$. Sehingga, X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M.

(⇐) X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M atau $X \cap C^* \neq \emptyset$. Karena $X \cap C^* \neq \emptyset$ maka paling tidak ada satu elemen misal y dimana $y \in X$ dan $y \in C^*$. Karena $S - X$ tidak memuat X yang berarti juga $S - X$ tidak memuat y, maka $S - X$ tidak memuat C^*.

Karena X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M, maka Sset maksimal yang tidak memuat C^* pada M. $S - X$ adalah subset maksimal yang tidak memuat C^* (himpunan tak bebas minimal) pada M^*. $S - X$ bukan himpunan tak bebas maksimal pada M^*. $S - X$ himpunan bebas maksimal pada M^*. $S - X$ adalah basis pada M^*. $S - X$ adalah kobasis pada M. X adalah basis pada M.

Demikian juga,

(⇒) Misal M adalah matroid pada himpunan S. Subset X^* dari S adalah kobasis (himpunan bebas maksimal) dari M. Berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh untuk himpunan bebas X^* dari M terdapat sebuah sirkit yang mempunyai tepat satu elemen dari X^* atau dapat dituliskan $X^* \cap C = \{x\}$. Karena irisannya hanya menghasilkan satu elemen, X^* adalah subset minimal. Berdasarkan Lemma 3.2 diperoleh $X^* \cap C \neq \emptyset$. Sehingga, X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M.

(⇐) X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M atau $X^* \cap C \neq \emptyset$. Karena $X^* \cap C \neq \emptyset$ maka paling tidak ada satu elemen misal y dimana $y \in X^*$ dan $y \in C$. Karena $S - X^*$ tidak memuat X^* yang berarti juga $S - X^*$ tidak memuat y, maka $S - X^*$ tidak memuat C. Karena X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M, maka $S - X^*$ adalah subset maksimal yang tidak memuat C (himpunan tak bebas minimal) pada M. $S - X^*$ bukan himpunan tak bebas maksimal pada M. $S - X^*$ himpunan bebas maksimal pada M. $S - X^*$ adalah basis pada M. X^* adalah kobasis pada M.

Teorema 3.5 :

Misal M adalah matroid pada sebuah himpunan S. Subset X dari S adalah sebuah sirkit dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M.

Demikian juga, subset X^* dari S adalah sebuah kosirkit dari M jika dan hanya jika X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis dari M.

Bukti :

(⇒) Misal subset X dari S adalah sebuah sirkit dari matroid M. Karena sirkit adalah himpunan tak bebas minimal dari S pada matroid M, maka X adalah himpunan tak bebas minimal dari S. Karena B adalah himpunan bebas maksimal (basis), maka $X \nsubseteq B$. $X \nsubseteq B$ yang berarti bahwa $\exists x \in X, x \notin B$.

Akan dibuktikan X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M atau $X \cap B^* \neq \emptyset$.

Andaikan $X \cap B^* = \emptyset$, maka diperoleh $\forall x \in X, x \notin B^*$ …(10)

Karena $x \notin B^*$ maka $x \in S - B^*$ atau $x \in B$.

Sehingga pada persamaan (10) diperoleh $\forall x \in X, x \in B$.

Hal ini kontradiksi dengan $\exists x \in X, x \notin B$.

Maka pengandaian salah seharusnya X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M atau $X \cap B^* \neq \emptyset$.

(⇐) Misal X adalah subset minimal dari S yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M atau $X \cap B^* \neq \emptyset$. Karena $X \cap B^* \neq \emptyset$ maka terdapat satu elemen misal y dimana $y \in X$ dan $y \in B^*$. Karena $S - B^*$ tidak memuat B^* yang berarti juga $y \notin S - B^*$, maka $X \nsubseteq S - B^*$.

Diketahui bahwa $S - B^* = S - (S - B) = B$ tidak memuat X atau $X \nsubseteq B$.

Karena X adalah subset minimal yang tidak termuat di himpunan bebas maksimal (basis), maka X adalah subset minimal yang termuat di himpunan tak bebas maksimal. Sehingga X adalah sebuah sirkit C dari matroid M, karena sirkit adalah himpunan tak bebas minimal pada S

Demikian juga,

(⇒) Misal subset X^* dari S adalah sebuah kosirkit dari matroid M. Karena kosirkit adalah himpunan tak bebas minimal dari S pada matroid M^*, maka X^* adalah himpunan tak bebas minimal dari S pada matroid M^*. Karena B^* adalah himpunan bebas maksimal (basis) pada matroid M^*, maka $X^* \nsubseteq B^*$. $X^* \nsubseteq B^*$ yang berarti bahwa $\exists x \in X^*, x \notin B^*$.

Akan dibuktikan X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis dari M atau $X^* \cap B \neq \emptyset$.

Andaikan $X^* \cap B = \emptyset$, maka diperoleh $\forall x \in X^*, x \notin B$ …(11)

Karena $x \notin B$ maka $x \in S - B$ atau $x \in B^*$.

Sehingga pada persamaan (11) diperoleh $\forall x \in X^*, x \in B^*$.

Hal ini kontradiksi dengan $\exists x \in X^*, x \notin B^*$.

Maka pengandaian salah seharusnya X^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis dari M atau $X^* \cap B \neq \emptyset$.

(⇐) Misal X^* adalah subset minimal dari S yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis

dari M atau $X^* \cap B \neq \emptyset$. Karena $X^* \cap B \neq \emptyset$ maka terdapat satu elemen misal y dimana $y \in X^*$ dan $y \in B$. Karena $S - B$ tidak memuat B yang berarti juga $y \notin S - B$, maka $X^* \nsubseteq S - B$.
Diketahui bahwa $S - B = B^*$ tidak memuat X^* atau $X^* \nsubseteq B^*$.
Karena X^* adalah subset minimal yang tidak termuat di himpunan bebas maksimal (basis) pada M^*, maka X^* adalah subset minimal yang termuat di himpunan tak bebas maksimal pada M^*. Sehingga X^* adalah sebuah sirkit C pada matroid M atau kosirkit C^* pada matroid M, karena kosirkit adalah himpunan tak bebas minimal dari S pada matroid M^*.

Lemma 3.5 :
Jika C^* adalah kosirkit dari matroid M pada himpunan S, maka untuk setiap $x \in C^*$, $(S - C^*) \cup \{x\}$ memuat sebuah basis B dari M.

Demikian juga, jika C adalah sirkit dari matroid M pada himpunan S, maka untuk setiap $x \in C, (S - C) \cup \{x\}$ memuat sebuah kobasis dari M.

Bukti :

Misal C^* adalah kosirkit dari matroid M. Dari Teorema 3.5, C^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis dari M atau $C^* \cap B \neq \emptyset$. Karena $C^* \cap B \neq \emptyset$ maka paling tidak ada satu elemen misal y dimana $y \in C^*$ dan $y \in B$. Karena $S - C^*$ tidak memuat C^* yang berarti juga $S - C^*$ tidak memuat y, maka $S - C^*$ tidak memuat B.

Karena C^* adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap basis dari M, maka $S - C^*$ adalah subset maksimal yang tidak memuat basis dari M. Ambil sebarang $x \in C^*$, jika $(S - C^*) \cup \{x\}$ maka
$(S - C^*) \cup \{x\}$ memuat sebuah basis B dari M.

Demikian juga, misal C adalah sirkit dari matroid M. Dari teorema 3.5, C adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M atau $C \cap B^* \neq \emptyset$. Karena $C \cap B^* \neq \emptyset$ maka paling tidak ada satu elemen misal y dimana $y \in C$ dan $y \in B^*$. Karena $S - C$ tidak memuat C yang berarti juga $S - C$ tidak memuat y, maka $S - C$ tidak memuat B^*.

Karena C adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M, maka $S - C$ adalah subset maksimal yang tidak memuat kobasis dari M. Ambil sebarang $x \in C$, jika $(S - C) \cup \{x\}$ maka
$(S - C) \cup \{x\}$ memuat sebuah kobasis B^* dari M.

Teorema 3.6 :
Misal M adalah matroid pada himpunan S. Subset X dari S adalah sebuah sirkit dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M.

Demikian juga, subset X^* dari S adalah sebuah kosirkit dari M jika dan hanya jika X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M.

Bukti :

($\Rightarrow$) Misal M adalah matroid pada himpunan S dan subset X dari S adalah sebuah sirkit dari M. Karena X adalah sirkit, berdasarkan definisi sirkit, maka X adalah himpunan tak bebas minimal. Akan dibuktikan bahwa X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M.
Andaikan X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| = 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M. $|X \cap C^*| = 1$ yang berarti bahwa $X \cap C^* = \{x\}$. Karena $X \cap C^* = \{x\}$, maka $x \in X$ dan $x \in C^*$.
Sekarang anggap $S' = S - C^*$ dan $C' = X - \{x\}$. Jelas, $C' \subseteq S'$. Berdasarkan Lemma 3.5, $(S - C^*) \cup \{x\} = S' \cup \{x\}$ memuat sebuah basis atau $B \subseteq S' \cup \{x\}$.

Ambil sebarang subset C' dari sirkit X atau $C' \subseteq X$. Berdasarkan sifat (i) dari sirkit diketahui bahwa C' adalah himpunan bebas. Berdasarkan Lemma 3.4, ada sebuah kosirkit C^* sedemikian sehingga $C^* \cap C' = \{x\}$. Karena C' adalah himpunan bebas, maka pasti ada B (basis) dimana

$$C' \subseteq B \qquad \dots (12)$$

Karena $C' \subseteq B$ dan $B \subseteq S' \cup \{x\}$, maka $C' \subseteq B \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $C' = X - \{x\}$, maka $X - \{x\} \subseteq B \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $x \in C'$ dan $C' \subseteq B$, maka $x \in B$.

Jadi $C' = X - \{x\},\ x \in B \qquad \dots (13)$

$X = C' \cup \{x\},\ x \in B \qquad \dots (14)$

Dari persamaan (12), (13) dan (14) diperoleh
$C' = X - \{x\} \subseteq B$ atau
$X = C' \cup \{x\} \subseteq B$
$X = C' \cup \{x\}$ termuat di B. X adalah sirkit yang termuat di B. Hal ini kontradiksi dengan definisi sirkit (himpunan tak bebas minimal) dan basis (himpunan bebas maksimal). Maka pengandaian salah, seharusnya X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M.

($\Leftarrow$) X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari $M \qquad \dots (15)$

Berdasarkan Teorema 3.4, diketahui bahwa subset X dari S adalah basis dan merupakan subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M. Berdasarkan definisi subset minimal, maka pasti ada subset X yang lain misal

X' yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M dimana $X \subseteq X'$.
Karena X basis dan $X \subseteq X'$ maka X' adalah himpunan tak bebas.
Jadi subset X dari S yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M adalah basis dan himpunan tak bebas.

Untuk subset X dengan $|X \cap C^*| \neq 1$,
Kasus I : X adalah himpunan tak bebas
Kasus II : X adalah basis (himpunan bebas maksimal).

Kasus I : X adalah himpunan tak bebas, karena X adalah himpunan tak bebas, maka $C \subseteq X$. Misalkan C adalah sirkit yang termuat di X. Karena C adalah sirkit, berdasarkan definisi sirkit, maka C adalah himpunan tak bebas minimal. Akan dibuktikan bahwa C adalah subset minimal dengan $|C \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M.
Andaikan C adalah subset minimal dengan $|C \cap C^*| = 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M. $|C \cap C^*| = 1$ yang berarti bahwa $C \cap C^* = \{x\}$. Karena $C \cap C^* = \{x\}$, maka $x \in C$ dan $x \in C^*$.
Sekarang anggap $S' = S - C^*$ dan $C' = C - \{x\}$. Jelas, $C' \subseteq S'$. Berdasarkan Lemma 3.5, $(S - C^*) \cup \{x\} = S' \cup \{x\}$ memuat sebuah basis atau $B \subseteq S' \cup \{x\}$.

Ambil sebarang subset C' dari sirkit C atau $C' \subseteq C$. Berdasarkan sifat (i) dari sirkit diketahui bahwa C' adalah himpunan bebas. Berdasarkan Lemma 3.4, ada sebuah kosirkit C^* sedemikian sehingga $C^* \cap C' = \{x\}$. Karena C' adalah himpunan bebas, maka pasti ada B (basis) dimana $C' \subseteq B$ … (16)
Karena $C' \subseteq B$ dan $B \subseteq S' \cup \{x\}$, maka $C' \subseteq B \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $C' = C - \{x\}$, maka $C - \{x\} \subseteq B \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $x \in C'$ dan $C' \subseteq B$, maka $x \in B$.
Jadi $C' = C - \{x\},\ x \in B$ … (17)
$C = C' \cup \{x\},\ x \in B$ … (18)
Dari persamaan (16), (17) dan (18) diperoleh
$C' = C - \{x\} \subseteq B$ atau
$C = C' \cup \{x\} \subseteq B$
$C = C' \cup \{x\}$ termuat di B. C adalah sirkit yang termuat di B. Hal ini kontradiksi dengan definisi sirkit (himpunan tak bebas minimal) dan basis (himpunan bebas maksimal). Maka pengandaian salah, seharusnya C adalah subset minimal dengan $|C \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M …(19)
Berdasarkan persamaan (15) dan (19) diperoleh $X = C$ atau X adalah sirkit.

Kasus II : X adalah himpunan bebas, hal tersebut kontradiksi dengan hasil pasa kasus I dimana X adalah sirkit (himpunan tak bebas minimal).
Sehingga terbukti bahwa X adalah subset minimal dengan $|X \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap kosirkit C^* dari M, maka X adalah sirkit.

Demikian juga,
($\Rightarrow$) Misal M adalah matroid pada himpunan S dan subset X^* dari S adalah sebuah kosirkit dari M. Karena X^* adalah kosirkit, berdasarkan definisi kosirkit, maka X^* adalah himpunan tak bebas minimal dari M^*. Akan dibuktikan bahwa X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M.
Andaikan X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| = 1$ untuk setiap sirkit C dari M. $|X^* \cap C| = 1$ yang berarti bahwa $X^* \cap C = \{x\}$. Karena $X^* \cap C = \{x\}$, maka $x \in X^*$ dan $x \in C$.
Sekarang anggap $S' = S - C$ dan $C' = X^* - \{x\}$. Jelas, $C' \subseteq S'$. Berdasarkan Lemma 3.5, $(S - C) \cup \{x\} = S' \cup \{x\}$ memuat sebuah kobasis atau
$B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.

Ambil sebarang subset C' dari kosirkit X^* dari $M/$ sirkit X^* dari M^* atau $C' \subseteq X^*$. Berdasarkan sifat (i) dari sirkit diketahui bahwa C' adalah himpunan bebas. Berdasarkan Lemma 3.4, ada sebuah sirkit C sedemikian sehingga
$C \cap C' = \{x\}$. Karena C' adalah himpunan bebas, maka pasti ada B^* (kobasis) dimana $C' \subseteq B^*$… (20)
Karena $C' \subseteq B^*$ dan $B^* \subseteq S' \cup \{x\}$, maka $C' \subseteq B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $C' = X^* - \{x\}$, maka $X^* - \{x\} \subseteq B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.
Karena $x \in C'$ dan $C' \subseteq B^*$, maka $x \in B^*$.
Jadi $C' = X^* - \{x\},\ x \in B^*$ … (21)
$X^* = C' \cup \{x\},\ x \in B^*$ … (22)
Dari persamaan (20), (21) dan (22) diperoleh
$C' = X^* - \{x\} \subseteq B^*$ atau
$X^* = C' \cup \{x\} \subseteq B^*$
$X^* = C' \cup \{x\}$ termuat di B^*. X^* adalah kosirkit yang termuat di B^*. Hal ini kontradiksi dengan definisi kosirkit (himpunan tak bebas minimal) dan kobasis (himpunan bebas maksimal). Maka pengandaian salah, seharusnya X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M.
($\Leftarrow$) X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M … (23)
Berdasarkan Teorema 3.4, diketahui bahwa subset X^* dari S adalah kobasis dan merupakan subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M. Berdasarkan definisi subset minimal, maka pasti ada subset X^* yang lain misal X' yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M dimana $X^* \subseteq X'$.

Karena X^* kobasis dan $X^* \subseteq X'$ maka X' adalah himpunan tak bebas.

Sehingga subset X^* dari S yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap sirkit dari M adalah kobasis dan himpunan tak bebas.

Untuk subset X^* dengan $|X^* \cap C| \neq 1$,

Kasus I : X^* adalah himpunan tak bebas

Kasus II : X^* adalah kobasis (himpunan bebas maksimal).

Kasus I : X^* adalah himpunan tak bebas, karena X^* adalah himpunan tak bebas, maka $C^* \subseteq X^*$. Misal C^* adalah kosirkit dari M/ sirkit dari M^* yang termuat di X^*. Karena C^* adalah kosirkit dari M/ sirkit dari M^*, berdasarkan definisi sirkit, maka C^* adalah himpunan tak bebas minimal. Akan dibuktikan bahwa C^* adalah subset minimal dengan $|C \cap C^*| \neq 1$ untuk setiap sirkit C^* dari M.

Andaikan C^* adalah subset minimal dengan $|C \cap C^*| = 1$ untuk setiap sirkit C dari M. $|C \cap C^*| = 1$ yang berarti bahwa $C \cap C^* = \{x\}$. Karena $C \cap C^* = \{x\}$, maka $x \in C$ dan $x \in C^*$.

Sekarang anggap $S' = S - C$ dan $C' = C^* - \{x\}$. Jelas, $C' \subseteq S'$. Berdasarkan Lemma 3.5, $(S - C) \cup \{x\} = S' \cup \{x\}$ memuat sebuah kobasis atau $B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.

Ambil sebarang subset C' dari kosirkit C^* dari M/ sirkit C^* dari M^* atau $C' \subseteq X^*$. Berdasarkan sifat (i) dari sirkit diketahui bahwa C' adalah himpunan bebas. Berdasarkan Lemma 3.4, ada sebuah sirkit C sedemikian sehingga $C \cap C' = \{x\}$. Karena C' adalah himpunan bebas, maka pasti ada B^* (kobasis) dimana $C' \subseteq B^*$ ... (24)

Karena $C' \subseteq B^*$ dan $B^* \subseteq S' \cup \{x\}$, maka $C' \subseteq B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.

Karena $C' = C^* - \{x\}$, maka $C^* - \{x\} \subseteq B^* \subseteq S' \cup \{x\}$.

Karena $x \in C'$ dan $C' \subseteq B^*$, maka $x \in B^*$.

Jadi $C' = C^* - \{x\},\ x \in B^*$ ... (25)

$C^* = C' \cup \{x\},\ x \in B^*$ ... (26)

Dari persamaan (24), (25) dan (26) diperoleh

$C' = C^* - \{x\} \subseteq B^*$ atau

$C^* = C' \cup \{x\} \subseteq B^*$

$C^* = C' \cup \{x\}$ termuat di B^*. C^* adalah kosirkit yang termuat di B^*. Hal ini kontradiksi dengan definisi kosirkit (himpunan tak bebas minimal) dan kobasis (himpunan bebas maksimal). Maka pengandaian salah, seharusnya C^* adalah subset minimal dengan $|C^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M. ...(27)

Berdasarkan persamaan (23) dan (27) diperoleh $X^* = C^*$ atau X^* adalah kosirkit.

Kasus II : X^* adalah himpunan bebas, hal tersebut kontradiksi dengan hasil pasa kasus I dimana X^* adalah kosirkit dari M / sirkit dari M^*.

Sehingga terbukti bahwa X^* adalah subset minimal dengan $|X^* \cap C| \neq 1$ untuk setiap sirkit C dari M, maka X^* adalah sirkit.

1. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa

1. Dual matroid dapat dibentuk dengan menggunakan $\mathfrak{B}(M)$ yaitu koleksi basis dari sebuah matroid M pada himpunan S.
2. $\rho^*(A) = |A| + \rho(S - A) - \rho(M)$ untuk setiap $A \subseteq S$.
3. Jika $A \cap A^* = \emptyset$, maka ada sebuah basis B dengan $A \subseteq B$ dan $A^* \subseteq B^*$.
4. Subset X dari S adalah basis dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kosirkit dari M.
5. Subset X dari S adalah sebuah sirkit dari M jika dan hanya jika X adalah subset minimal yang mempunyai irisan tak kosong dengan setiap kobasis dari M.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

[2] Duality Termuat di : http://fds.oup.com/www.oup.com/pdf/13/9780199603398.pdf (Diakses pada tanggal 13 Januari 2013, pukul 18.20)

[3] Goemans, Michel X. 2009. Lecture 8 : Matroids Termuat di : http://math.mit.edu/~goemans/18438F09/lec8.pdf (Diakses pada tanggal 15 Februari 2013, pukul 09.39)

[4] Hrbacek, Karel dan Thomas Jech. 1999. Introduction to Set Theory. Amerika : Marcel Dekker.

[4] Isdiyana, Maria. 2005. *Pengantar Matroid.* Skripsi. Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Surabaya.

[6] Jannah, Rina M. 2005. *Beberapa Sifat Matroid.* Skripsi. Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Surabaya.

[7] Johnson, Will. 2009. Matroid Termuat di : http://www.math.washington.edu/~morrow/33

6_09/papers/Will.pdf (Diakses pada tanggal 15 Februari 2013, pukul 09.33)
[8] Rosidah, Siti. 2001. *Hubungan Graf, Ruang Kebebasan, dan Dual Graf pada Struktur Cycle dan Struktur Cutset*. Skripsi. Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Pertanian Bogor. (Online : http://repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/18179/G01sro.pdf?sequence=1)
[9] Schrijver. Combinatorial Optimization Matroid Termuat di : http://users.eecs.northwestern.edu/~nickle/combOpt/lec6.pdf (Diakses pada tanggal 15 Februari 2013, pukul 09.39)
[10] Thulasiraman, K. 1992. *Graphs : Theory and Algorithms*. Canada : A Wiley-Interscience.
[11] West, Douglas B. *Introduction to Graph Theory*. Urbana : Prentice-Hall,Inc.
[12] Wijaya, Adi. Matematika Diskrit. Termuat di : *http://repository.politekniktelkom.ac.id/Courseware/Semester%202/Matematika%20Diskrit/Buku%20Cetak%20Des%202009/12_Matdis_Eng.pdf* (Diakses pada tanggal 4 April 2013, pukul 15.23)
[13] Wilson, Robin J. 1996. *Introduction to Graph Theory*. Malaysia.